Элементарные функции и их графики

Понятие функции — одно из ключевых в математике. О нём подробно рассказано в нашей статье «Что такое функция?».

Знания об элементарных функциях и их графиках необходимы для решения уравнений и неравенств даже в части B — например, в задании B12. И конечно, в части C без них не обойтись. А если вы выбрали технический или экономический вуз — первая же лекция по матанализу будет посвящена именно элементарным функциями и их графикам.

Но это не всё. Математические функции, изучением которых мы занимаемся, — это не что-то такое выдуманное или существующее только в замкнутом пространстве учебника. Они являются отражением реальных взаимосвязей и процессов, происходящих в природе и обществе.

Существует всего пять типов элементарных функций:

1. Степенные
К этому типу относятся линейные, квадратичные, кубические, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[n]{x}$.
Все они содержат выражения вида x^{α}.

2. Показательные
Это функции вида $y = a^x$.

3. Логарифмические
$y = \log_a x$.

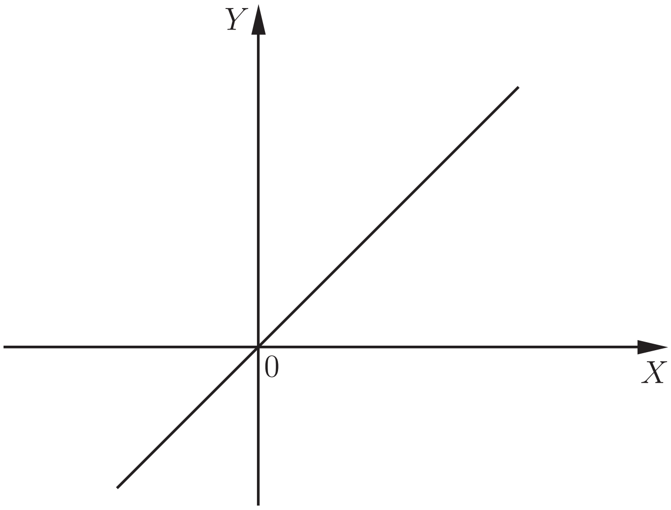
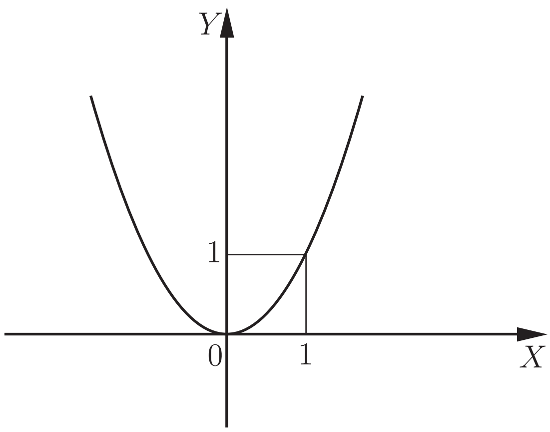
4. Тригонометрические
В их формулах присутствуют синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы.

5. Обратные тригонометрические.
Содержат $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

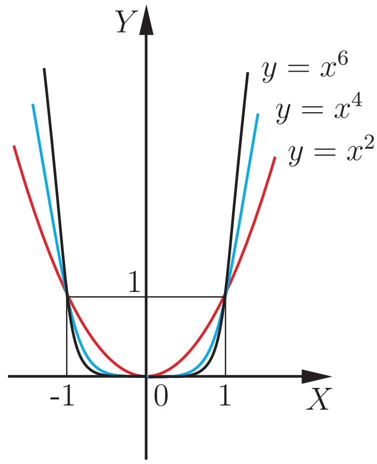
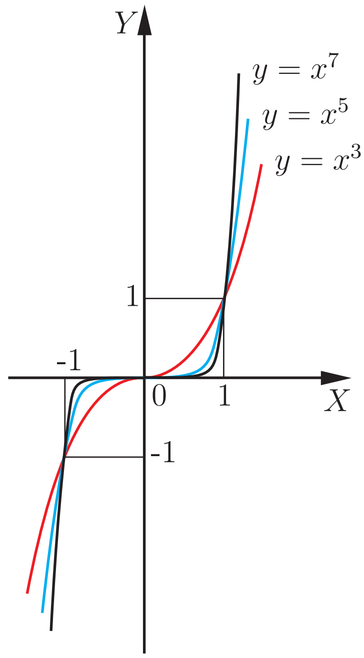
Элементарными они называются потому, что из них, как из элементов, получаются все остальные, встречающиеся в школьном курсе. Например, $y = x^2 \cdot e^x$ — произведение квадратичной и показательной функций; $y = \sin\left(a^x\right)$ — сложная функция, то есть комбинация двух функций — показательной и тригонометрической.

Графики и свойства основных элементарных функций следует знать наизусть.

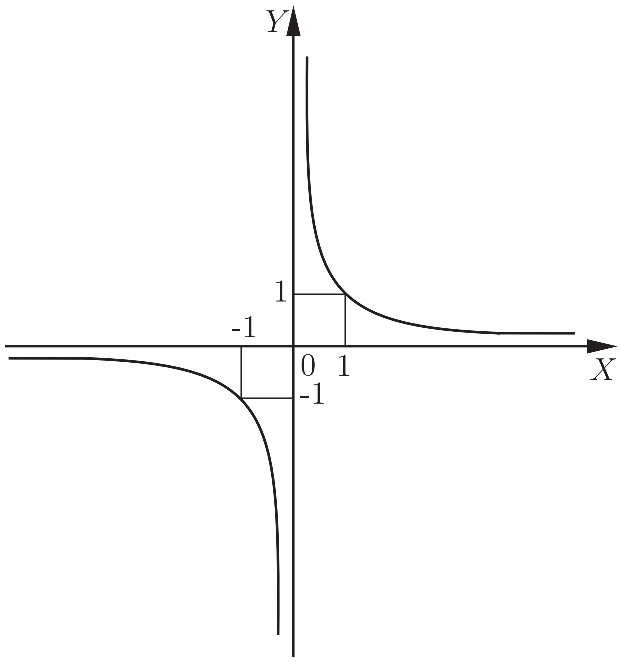
Степенные функции

1. Линейная функция $y = x$	
2. Квадратичная парабола $y = x^2$	

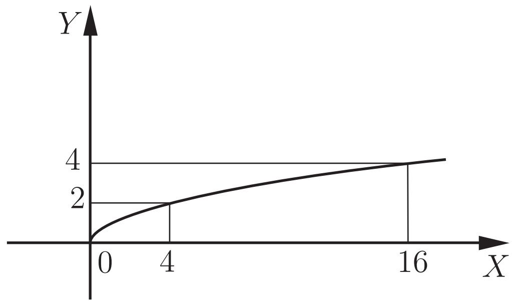
<table>
<tr>
<td>3. Функция $y = x^n$,
n — натуральное, $n > 1$

n — чётное
$n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>n — нечётное
$n = 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

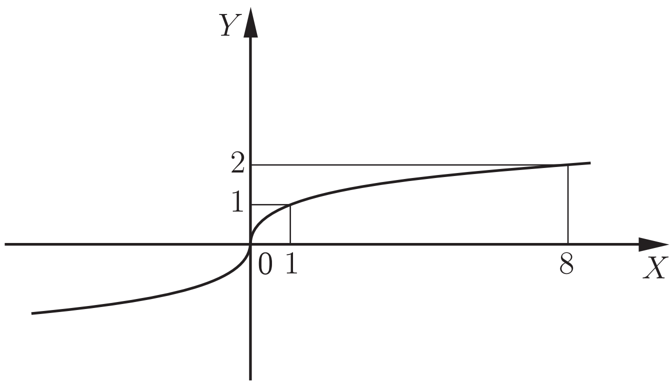
4. Гипербола $y = \frac{1}{x}$



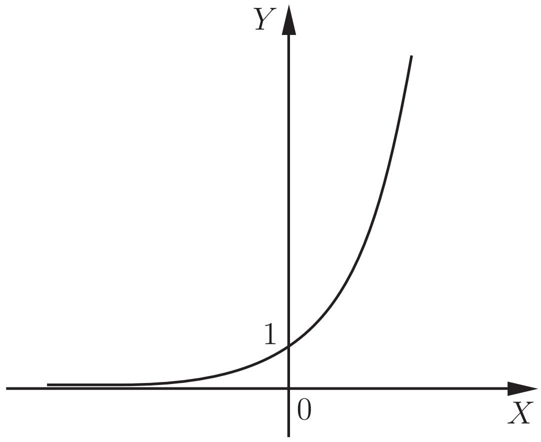
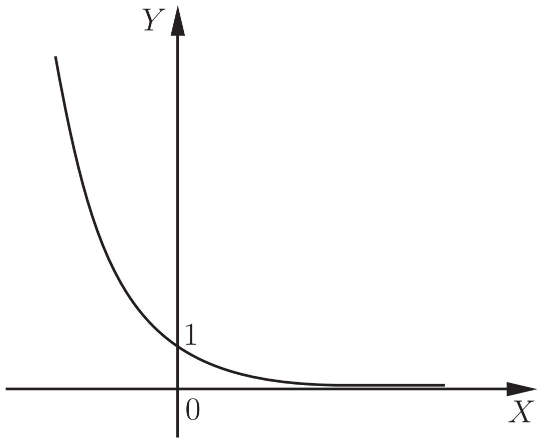
5. $y = \sqrt{x}$



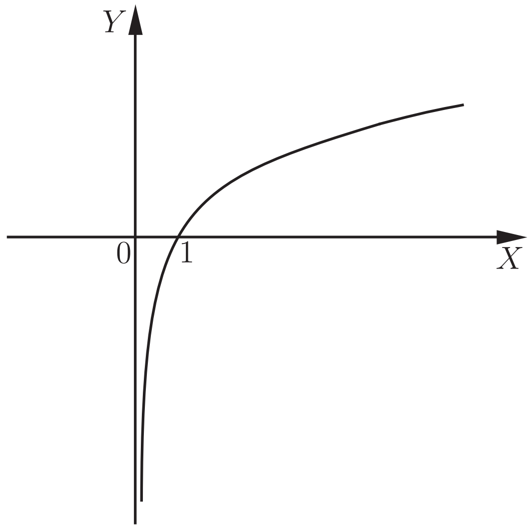
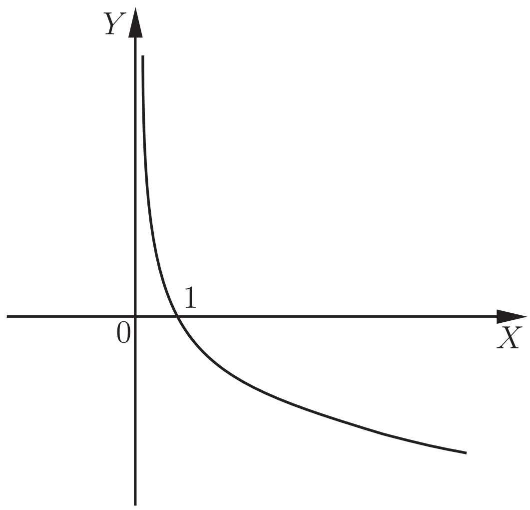
6. $y = \sqrt[3]{x}$



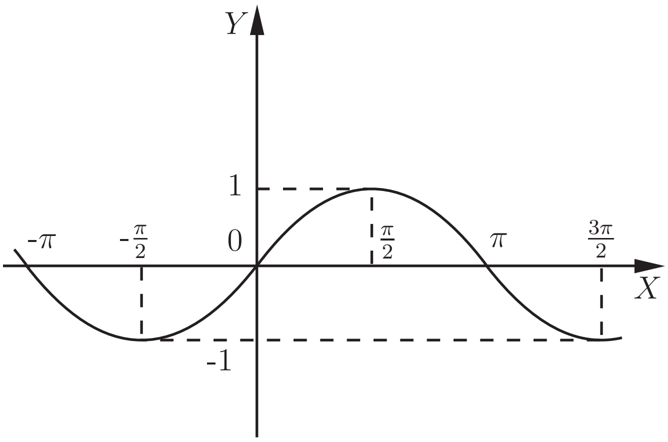
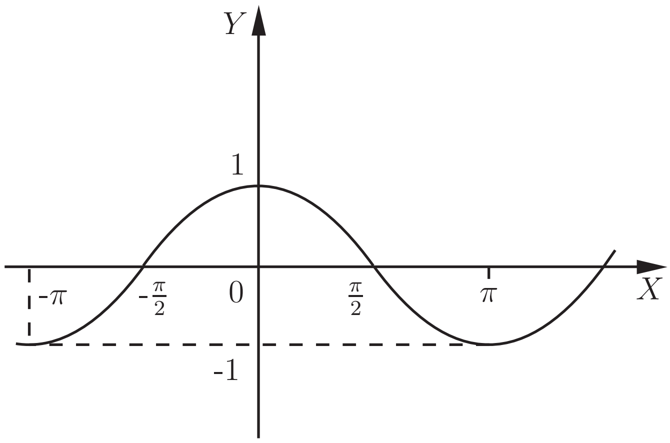
Показательная функция $\mathbf{y = a^x}$

$a > 1$	
$0 < a < 1$	

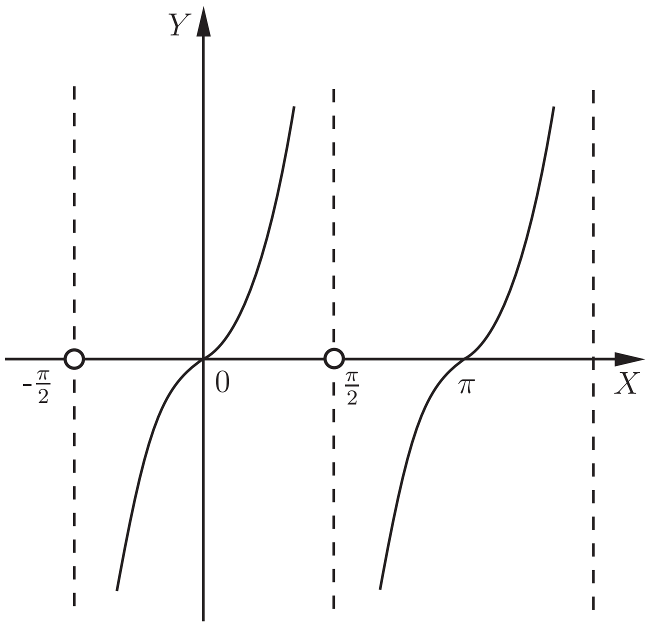
Логарифмическая функция $\mathbf{y} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{x}$

<table>
<tr><td>$a > 1$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$0 < a < 1$</td><td>
</td></tr>
</table>

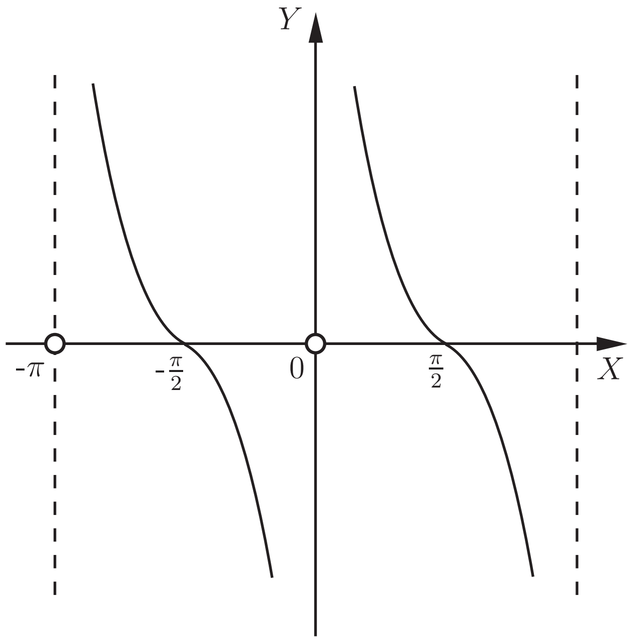
Тригонометрические функции

1. $y = \sin x$	
2. $y = \cos x$	

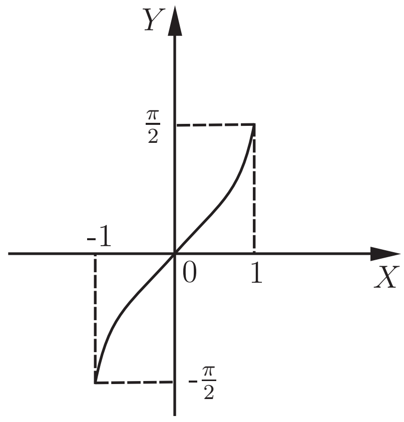
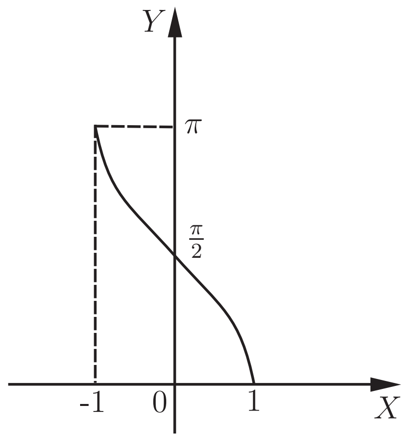
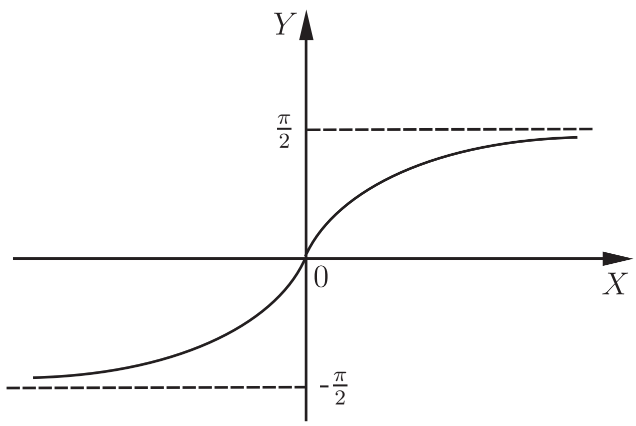
3. $y = \operatorname{tg} x$

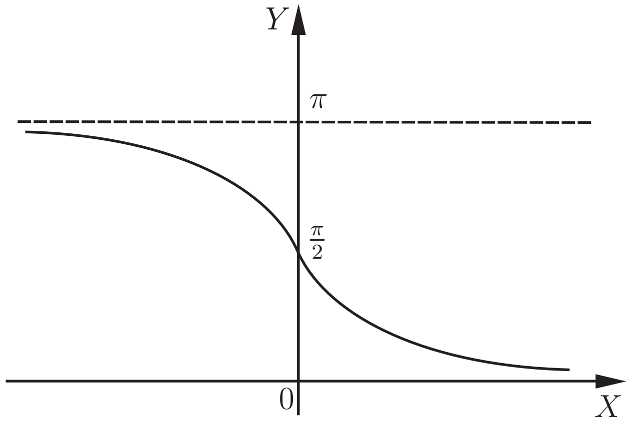


4. $y = \operatorname{ctg} x$



Обратные тригонометрические функции

<table>
<tr><td>1. $y = \arcsin x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2. $y = \arccos x$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3. $y = \operatorname{arctg} x$</td><td>
</td></tr>
</table>

4. $y = \operatorname{arcctg} x$	

Выше приведены основные, «базовые» графики. А как будут выглядеть, например, графики функций $y = \sin(2x)$ или $y = 4x^2 + 5$? Об этом — статья «Преобразования графиков функций».

Обратите внимание: уравнения, которые вы решаете, обычно относятся к одному из этих пяти типов. Для каждого типа — свои способы решения. Это и понятно: они основаны на тех или иных свойствах функций.

Почему в уравнении $3^x = 3^5$ мы можем «отбросить» основания и записать, что $x = 5$? Да потому что показательная функция $y = 3^x$ возрастает и каждое значение принимает только один раз.

Почему уравнение $\sin x = a$ имеет бесконечно много решений, которые записываются в виде серии: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, где n — целое? Потому что функция $y = \sin x$ — периодическая, то есть каждое свое значение принимает бесконечно много раз.

Зная графики элементарных функций, вы уже не запутаетесь с ОДЗ уравнений и неравенств. Вы сможете решать сложные задачи графически — а это часто во много раз легче и быстрее, чем аналитически.

Есть еще и такие уравнения, где слева и справа стоят функции разных типов. Для их решения есть графический способ, а также специальные приемы, о которых рассказывается в статье «Метод оценки, или Эсхил и черепаха».